Uitwerkingen CCVW Wiskunde B 21-4-2023

Vraag 1a - 6 punten

$\int_0^a 3e^{2x}\,dx = \left[\frac{3}{2}e^{2x}\right]_0^a = \frac{3}{2}e^{2a} - \frac{3}{2}e^0 = \frac{3}{2}e^{2a} - \frac{3}{2}\cdot 1 = \frac{3}{2}e^{2a} - \frac{3}{2}$

$\frac{3}{2}e^{2a} - \frac{3}{2} = 72 \Leftrightarrow e^{2a} - 1 = 48 \Leftrightarrow e^{2a} = 49 \Leftrightarrow 2a = \ln(49) \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}\ln(49) = \ln(7)$

Vraag 1b - 6 punten

$g'(x) = \dfrac{2x}{x^2+3};\quad g''(x) = \dfrac{2(x^2+3) - 2x\cdot 2x}{(x^2+3)^2}$

$g''(x) = 0 \Leftrightarrow 2(x^2+3) - 2x\cdot 2x = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 6 - 4x^2 = 0 \Leftrightarrow 6 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$

Vraag 1c - 6 punten

$h'(x) = -e^{-x}\cdot\sqrt{2-x^2} + e^{-x}\cdot\dfrac{-2x}{2\sqrt{2-x^2}}$

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow -\sqrt{2-x^2} - \dfrac{x}{\sqrt{2-x^2}} = 0 \Leftrightarrow -\dfrac{x}{\sqrt{2-x^2}} = \sqrt{2-x^2} \Rightarrow -x = 2 - x^2$

$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 2$

De maximumwaarde is $h(-1) = e$ ($h(2)$ bestaat niet!)

Vraag 2a - 7 punten

$f(x) = x \Leftrightarrow -x^2 + 4x = x \Leftrightarrow x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3$
De grenzen van *V* zijn dus $x = 0$ en $x = 3$

De inhoud van het omwentelingslichaam van f wordt gegeven door

$\pi\cdot\int_0^3 (-x^2+4x)^2\,dx = \pi\cdot\int_0^3 x^4 - 8x^3 + 16x^2\,dx = \pi\cdot\left[\frac{1}{5}x^5 - 2x^4 + \frac{16}{3}x^3\right]_0^3$

$= \pi\cdot\left(\frac{243}{5} - 162 + 144 - 0\right) = 30\frac{3}{5}\pi$

De inhoud van de kegel die ontstaat door de lijn y = x om de x-as te wentelen is gelijk aan
$\frac{1}{3}\pi\times straal^2\times hoogte = \frac{1}{3}\pi\cdot 3^2\cdot 3 = 9\pi$
of aan $\pi\cdot\int_0^3 x^2\,dx = \pi\cdot\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^3 = \pi\cdot(9-0) = 9\pi$

De inhoud van het omwentelingslichaam van *V* is dus $30\frac{3}{5}\pi - 9\pi = 21\frac{3}{5}\pi$

Vraag 2b - 4 punten

In het raakpunt geldt $f(x) = g_a(x)$ en $f'(x) = g_a{}'(x)$

$f'(x) = g_a'(x) \Leftrightarrow -2x + 4 = 2x \Leftrightarrow 4x = 4 \Leftrightarrow x = 1$

$f(1) = g_a(1) \Leftrightarrow 3 = 1 + a \Leftrightarrow a = 2$

Alternatief:

De grafieken raken elkaar als de vergelijking $f(x) = g_a(x)$ één oplossing heeft

$f(x) = g_a(x) \Leftrightarrow -x^2 + 4x = x^2 + a \Leftrightarrow 2x^2 - 4x + a = 0$

$D = 16 - 4\cdot 2a = 16 - 8a$

De grafieken raken elkaar dus als $D = 0 \Leftrightarrow 16 - 8a = 0 \Leftrightarrow a = 2$

Vraag 2c - 6 punten

In een perforatie geldt $t(x) = 2x^2 + 5x - 3 = 0$ en $n(x) = x^2 - 9 = 0$

$t(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 2 \cdot -3}}{2 \cdot 2} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{49}}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \vee x = -3$

$n(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -3$

De *x*-coördinaat van de perforatie is dus -3

Voor $x \neq -3$ geldt $h(x) = \dfrac{2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+3)}{(x-3)(x+3)} = \dfrac{(2x-1)(x+3)}{(x-3)(x+3)} = \dfrac{2x-1}{x-3}$

De *y*-coördinaat van de perforatie is dus $\lim\limits_{x \to -3} h(x) = \frac{2 \cdot -3-1}{-3-3} = \frac{-7}{-6} = \frac{7}{6}$

Vraag 3a - 3 punten

Het middelpunt van c_1 is $M(4{,}3)$ en de straal is $\sqrt{9} = 3$. Het punt $P(4{,}0)$ ligt dus op c_1

De straal MP staat loodrecht op de *x*-as, dus is de *x*-as de raaklijn aan c_1 in P.

Het middelpunt van c_2 is $N(16{,}12)$ en de straal is $\sqrt{144} = 12$. Het punt $Q(16{,}0)$ ligt dus op c_2

De straal NQ staat loodrecht op de *x*-as, dus is de *x*-as de raaklijn aan c_2 in *Q*.

Alternatief:

$y = 0$ invullen in de vergelijking van c_1 geeft $(x-4)^2 + 9 = 9 \Leftrightarrow (x-4)^2 = 0$

Deze vergelijking heeft precies één oplossing, dus hebben c_1 en de *x*-as precies één gemeenschappelijk punt. Dat betekent dat de *x*-as een raaklijn is van c_1

$y = 0$ invullen in de vergelijking van c_2 geeft $(x-16)^2 + 144 = 144 \Leftrightarrow (x-16)^2 = 0$

Ook deze vergelijking heeft precies één oplossing, dus hebben c_2 en de *x*-as ook precies één gemeenschappelijk punt. Dat betekent dat de *x*-as een raaklijn is van c_2

Vraag 3b - 7 punten

Het raakpunt R ligt op de rechte lijn door de middelpunten van c_1 en c_2
Het middelpunt van c_1 is $M(4{,}3)$ en het middelpunt van c_2 is $N(16{,}12)$

Een richtingsvector van de lijn door M en N is dus $\begin{pmatrix} 16-4 \\ 13-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 9 \end{pmatrix}$.

Lijn l staat loodrecht op de lijn door M en N en heeft dus richtingsvector $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$
of een veelvoud hiervan

$d(MR) = 3$, $d(RN) = 12$; $d(MN) = 3 + 12 = 15$

Hieruit volgt $\overrightarrow{MR} = \frac{1}{5}\overrightarrow{MN} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 12 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}4 \\ 1{,}8 \end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MR} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2{,}4 \\ 1{,}8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6{,}4 \\ 4{,}8 \end{pmatrix}$

Dit geeft de vectorvoorstelling $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6{,}4 \\ 4{,}8 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

De coördinaten van R kunnen ook berekend worden door de lijn door M en N (met vergelijking $y = \frac{3}{4}x$) te snijden met beide cirkels.

Je kunt ook eerst een vergelijking voor lijn l berekenen. Deze moet dan nog worden omgezet worden naar een vectorvoorstelling. Omdat dit meer rekenwerk vraagt, is dit hier maar beknopt uitgewerkt.
Eén mogelijkheid is om eerst op te merken dat de vergelijking van l de vorm $4x + 3y = c$ heeft en dan de waarde van c te berekenen waarvoor $d(l, M) = 3$ en $d(l, N) = 12$.
Een andere mogelijkheid is om de haakjes in de vergelijkingen van c_1 en c_2 weg te werken en deze vergelijkingen van elkaar af te trekken. Dit geeft onmiddellijk een vergelijking voor lijn l,.

Vraag 3c - 5 punten

De lijn door de middelpunt $M(4,3)$ van c_1 en middelpunt $N(16,12)$ van c_2 heeft vergelijking $y = \frac{3}{4}x$

Deze lijn snijdt k in de oorsprong $O(0,0)$ en vormt daar de bissectrice van k en m

Voor de hoek α tussen k en de lijn door M en N geldt:

$\sin(\alpha) = \frac{MP}{OM} = \frac{3}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{3}{5}$ en $\cos(\alpha) = \frac{OP}{OM} = \frac{4}{5}$ (*met* $P(4,0)$)

Voor de hoek β tussen k en m geldt dus

$\sin(\beta) = \sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha) = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{24}{25}$

Vraag 3d - 4 punten

De lijn door A en B is een middellijn van c_1

Volgens de stelling van Thales geldt dus $\angle ACB = 90°$

$\angle ABC + \angle BAC + \angle ACB = 180°$ (hoekensom driehoek)

Dit geeft $\angle BAC = 180° - \angle ABC - \angle ACB = 180° - 33° - 90° = 57°$

Vraag 4a - 7 punten

$y(t) = x(t) \Leftrightarrow \cos(3t) = \sin(2t) \Leftrightarrow \cos(3t) = \cos\left(2t - \frac{1}{2}\pi\right)$

Dit geeft $3t = 2t - \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \vee 3t = \frac{1}{2}\pi - 2t + k \cdot 2\pi$

$3t = 2t - \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$

$3t = \frac{1}{2}\pi - 2t + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow 5t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow t = \frac{1}{10}\pi + k \cdot \frac{2}{5}\pi$

Oplossingen op het interval $-\pi \leq t \leq \pi$:

$t = -\frac{1}{2}\pi,$

$t = \frac{1}{10}\pi,\ t = \frac{1}{10}\pi + \frac{2}{5}\pi = \frac{1}{2}\pi,\ t = \frac{1}{10}\pi + \frac{4}{5}\pi = \frac{9}{10}\pi$

$t = \frac{1}{10}\pi - \frac{2}{5}\pi = -\frac{3}{10}\pi,\ t = \frac{1}{10}\pi - \frac{4}{5}\pi = -\frac{7}{10}\pi$

Kan ook met $\cos(3t) = \cos\left(\frac{1}{2}\pi - 2t\right)$*, met dezelfde uitwerking als hierboven,*

met $\sin\left(3t + \frac{1}{2}\pi\right) = \sin(2t) \Leftrightarrow 3t + \frac{1}{2}\pi = 2t + k \cdot 2\pi \vee 3t + \frac{1}{2}\pi = \pi - 2t + k \cdot 2\pi$

en met $\sin\left(\frac{1}{2}\pi - 3t\right) = \sin(2t) \Leftrightarrow \frac{1}{2}\pi - 3t = 2t + k \cdot 2\pi \vee \frac{1}{2}\pi - 3t = \pi - 2t + k \cdot 2\pi$

Beide geven weer $t = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \vee 5t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$

Vraag 4b - 7 punten

$x(t) = 0 \Leftrightarrow \sin(2t) = 0 \Leftrightarrow 2t = 0 + k \cdot \pi \Leftrightarrow t = 0 + k \cdot \frac{1}{2}\pi$

$y(0) = \cos(0) = 1,\ \ y\left(\frac{1}{2}\pi\right) = \cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 0,\ y(\pi) = \cos(3\pi) = -1$

$y\left(-\frac{1}{2}\pi\right) = \cos\left(-\frac{3}{2}\pi\right) = 0,\ \ y(-\pi) = \cos(-3\pi) = -1$

P passeert de oorsprong dus op $t = -\frac{1}{2}\pi$ en op $t = \frac{1}{2}\pi$

$x'(t) = 2\cos(2t),\ \ y'(t) = -3\sin(3t)$

Dit geeft $x'\left(\frac{1}{2}\pi\right) = 2\cos(\pi) = -2,\ x'\left(-\frac{1}{2}\pi\right) = 2\cos(-\pi) = -2$

$y'\left(\frac{1}{2}\pi\right) = -3\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 3,\ \ y'\left(-\frac{1}{2}\pi\right) = -3\sin\left(-\frac{3}{2}\pi\right) = -3$

Vervolg met cosinusformule:

De richtingsvectoren van de raaklijnen zijn $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$

Voor de hoek α tussen de raaklijnen geldt dus

$\cos(\alpha) = \frac{\left(\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}\right)}{\left|\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}\right|} = \frac{-9+4}{\sqrt{9+4} \cdot \sqrt{9+4}} = -\frac{5}{13}$. Dit geeft $\alpha = \cos^{-1}\left(-\frac{5}{13}\right) \approx 112{,}6°$

ofwel een scherpe hoek van $67{,}4° \approx 1{,}176$ *radialen*

Vervolg met tangens:

De tangensen van de raaklijnen zijn $\frac{3}{-2} = -\frac{3}{2}$ en $-\frac{3}{-2} = \frac{3}{2}$

$\tan^{-1}\left(-\frac{3}{2}\right) \approx -56{,}3°;\ \ \tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right) \approx 56{,}3°$

De hoek tussen de raaklijnen is dus $56{,}3° - (-56{,}3°) = 112{,}6°$

ofwel een scherpe hoek van $67{,}4° \approx 1{,}176$ *radialen*

Vraag 4c - 4 punten

$y(t) = 4\cos(t) - 2\sin^2(t) = 4\cos(t) - 2(1 - \cos^2(t)) = 4\cos(t) - 2 + 2\cos^2(t)$

$= 2\cos^2(t) + 4\cos(t) + 2 - 4 = 2(\cos^2(t) + 2\cos(t) + 1) - 4 = 2\big(x(t)\big)^2 - 4,$

dus $a = 2,\ \ b = 0$ en $c = -4$

Alternatief 1:

Invullen van de formules voor $y(t)$ en $x(t)$ in $y = ax^2 + bx + c$ en substitutie van $\sin^2(t) = 1 - \cos^2(t)$

geeft $4\cos(t) - 2 + 2\cos^2(t) = a\cos^2(t) + 2a\cos(t) + a + b\cos(t) + b + c$

Hieruit volgt $a = 2;\ 2a + b = 4$ en $a + b + c = -2$

Invullen van $a = 2$ in de andere twee vergelijkingen geeft $b = 0$ en $c = -4$

Alternatief 2:

$t = 0$ geeft $x = 2$ en $y = 4$; $t = \frac{1}{2}\pi$ geeft $x = 1$ en $y = -2$; $t = \pm\pi$ geeft $x = 0$ en $y = -4$

Invullen van deze punten in $y = ax^2 + bx + c$ geeft: $4 = 4a + 2b + c;\ \ -2 = a + b + c;\ \ -4 = c$

$c = -4$ invullen in de eerste twee vergelijkingen geeft:

$$\begin{cases} 4 = 4a + 2b - 4 \\ -2 = a + b - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + 2b = 8 \\ a + b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 - b \\ 4(2 - b) + 2b = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 0 \end{cases}$$